アイザック・ニュートンの1680(?)年草稿「曲線の幾何学」について (数学史の研究)

林, 知宏

数理解析研究所講究録
第 1625 巻 2009 年 45-55

アイザック・ニュートンの1680（?）年草稿「曲線の幾何学」について

学習院高等科　林　知宏（Tomohiro HAYASHI）
Gakushuin Boys' High School

2008.11.30

1　本論文の主旨・意図

アイザック・ニュートン（1642-1727）は，数学研究において 1670 年代初めまでに主たる成果を残していた．彼の流率法の骨格は，20 代の間に作り上げられたのだった．ニュートンの数学研究の流れを把握する上では，三つの主要論文，すなわち 1666 年 10 月論文，「解析について」（De analysi･･･）論文（1669 年），「方法について」（De methodis･･･）論文（1670-71 年）を中心とした分析が必須となる．ここで取り上げるのは，それらとは執筆時期も記述の形式も異なる草稿「曲線の幾何学」（Geometria curvilinea）である．執筆時期に関しては，一応 1680 年頃と推定されている．この草稿は，最終的には完成に至らないまま放棄された．したがって生前は刊行されることなく，人々の目に触れることはなかっただろう．ホワイトサイド編纂による『数学論文集』（*The Mathematical Papers of Isaac Newton*）により（第Ⅳ巻所収），ようやくニュートン研究者たちに知られることとなった．

ニュートンは，そこで総合的・演繹的な記述法により，彼の流率法が得た成果を示めそうとしている．すなわち定義・公理・公準の設定から始まり，諸命題の証明，諸問題の解決へと進んでいく．これは先の三つの主論文とは異なり，形式的に整えられている．ニュートンは新しい結果を示すことよりも，むしろ論証を体系的に整理して提示することを主目的にしているように見える．これをニュートンのデカルト批判と結びつけて，ニュートンの数学研究のスタイルに変化が生じていると見る解釈もあり得るだろう．[1]　確かに 1687 年に初版が刊行された『自然哲学の数学的諸原理』（通称『プリンキピア』）の形式を彷彿させることから，デカルトが「幾何学」の名のもとに提示した数学に対比する何らかのものを構築しようとしたとも捉えられる．

本稿は，草稿「曲線の幾何学」の内容分析を行う．そしてこの草稿が意図したものを把握することを試みたい．またニュートンの流率法の進展の中で，どのように位置づけられるかを考えたい．まず次節では，この草稿の執筆時期と想定される 1680 年頃のニュートンの状況を確認する．

[1] 高橋秀裕は，“De methodis”論文の付された「補遺」（1671-72 年）とこの草稿「曲線の幾何学」に代表される内容を指して「ニュートンの幾何学的流率論の建設は，彼の青年期における数学的スタイルを大きく転換させるものであった」と位置づけている．高橋秀裕『ニュートン：流率法の変容』（東京大学出版会，2003 年），194 頁．また 164 頁の図 4.2 も参照．

そして第3節以降では，1）序論，定義・公理・公準に設定された基本概念の確認，2）代表的命題の分析を行う．その上で得た知見を述べたい．

2　1680年草稿「曲線の幾何学」執筆の背景（1680年頃のニュートンの状況）

ホワイトサイドは，この草稿の執筆年代について“writing style”を見て判断した結果，1680年頃の執筆と推定している．[2]　ただしホワイトサイドの判断については，この手稿の内容をもとに異論を唱えることもできる．例えば，1671年から翌年にかけて執筆された「方法について」論文の補遺の時期に近寄らせることも可能だろうし，反対に『プリンキピア』につながる研究を開始した1684年頃に遅らせることもできるだろう．いずれもこの草稿「曲線の幾何学」と記述スタイルの点で共通しているし，また内容的に重なる部分もある．したがって執筆時期に関して一定の幅（1672年頃から1684年頃まで）を考えに入れるのが自然である．ただ，ホワイトサイドによる判断を覆すに足る十分な根拠を示すこともできない．そこで一応，「1680年頃の執筆」というホワイトサイドの判断を前提しつつ，議論を進めていきたい．

ニュートンにとって，1680年頃は1670年代初めまでのように数学研究が最重要課題ではなかった時期である．[3]　数学よりも神学，錬金術関連の研究に打ち込んでおり，ルーカス教授職を務める上でノルマを果たすために代数の講義をケンブリッジで行う日々を過ごしていた．ただそうした中で，ニュートンの数学研究を再度推進させる動機となり得る出来事が二つ起きた．一つは1679年にフェルマーの『遺作集』やフィリップ・ラ・イールの著作が刊行されたことである．これらの著作を通じてニュートンは，アポロニオスに始まる軌跡問題に関心をよみがえらせたようである．さらにもう一つは，いまの問題関心に関連して，デカルトの『幾何学』を再読したことである．

若き日にスホーテンのラテン語訳でデカルトの方法論を学び，多大な影響を受けていたニュートンだが，自分自身のオリジナルな研究を行っていく上でデカルトは乗り越えるべき対象であったろう．この時期にはデカルトの手法に対して，幾何学として違和感があることを書き残しているようである．[4]　ニュートンの批判の要点は，幾何学的問題を代数的方程式に還元することそのものにある．また数学的な成果を記すための伝統的な手段である「総合的（演繹的）方法」を採っていないことに対する不満である．証明の「厳密性」を保証するための構造が備わっていない，すなわち説得力の面から見て問題があるという判断があったのだろう．また，デカルトの取り組んだ円錐曲線や他の曲線に対する問題，例えば接線問題や法線問題に対して十分な解決が成し遂げられておらず，そうした古典的著作の中に彼を刺激する要素が含まれていたのだろう．われわれが関心を寄せる草稿「曲線の幾何学」の内容は，以上の状況と係り合いを持っているだろう．この段階で，ニュートンにとって流率法の新たな成果が生み出されたのではない．しかしまた違った主旨に基づいて自己の研究を振り返るタイミングになった可能性が高いのである．

---

[2] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, edited by D. T. Whiteside(Cambridge: Cambridge at the University Press, 1971)（以下ではMPと省略する），Ⅳ, p. 410.

[3] 伝記的記述は，Westfall, *Never at Rest*(Cambridge: Cambridge University Press, 1980)，邦訳，田中一郎・大谷隆昶訳『アイザック・ニュートン』Ⅰ，Ⅱ（平凡社，1993年）による．

[4] 前掲書，p. 379f，邦訳，Ⅰ，415f頁．

3　1680年草稿「曲線の幾何学」の内容

この草稿の意図は，第1巻を見るとすぐに了解できる．ニュートンの抱いていた問題関心に基づき，彼が1670年代初めまでに（3主要論文などによって）すでに築いていた成果を再構成しようとすることである．さらにデカルト『幾何学』第2巻で扱われた問題に対する解決をニュートン流の発想で図ろうとする．さらにはもっと先まで進んで行くつもりもあっただろう．だがそれは成功裏に終わらず，最終的に中途で放棄されてしまった．

ニュートンの目には，流率論を総合的に再構成することは，ある程度成功すると見通すことができただろう．その方法を通じてデカルトや他の先行研究に比して，より明確化することができた部分もある．しかしこの草稿は，後半になると断片のみしか記されていない．全体として古典的な手法によって流率論を組み立て，成果を示すことは頓挫したまま終わったと言うしかない．外的な理由が草稿執筆を妨げたとも考えられる．[5]

この草稿は第1巻，第2巻と分かれている．第1巻は定義，公理・公準，30個の命題から構成されている．伝統的な流儀で記述されており，体系的に結果を提示する意図が明瞭である．第2巻は第1巻で証明された命題の応用編として問題が10個掲げられている．だが，後半は断片のみで，結局この草稿が完成に至らなかったことがわかる．加えて，ホワイトサイドは第1巻に対する修正の試みも同じ『ニュートン数学著作集』（第Ⅳ巻）に収録している．ただこちらも多くは断片にとどまっている．

3.1　基本概念

「曲線の幾何学」第1巻の内容を確認しよう．全体に先立ち，序論が述べられる．ニュートンはその中で，特に以下の四つの事柄に注意している．

1) 記号的算術と幾何学を結びつけること，

2) 解析で解くならわしになっている問題の多くは，総合的方法によって解くことができること，

3) ユークリッド『原論』の方法だけでは曲線の考察には不十分であること，

4) 曲線図形を考える際，無限小の導入は不要であること．

1），2）は，前項で述べたデカルト『幾何学』や同時代に普及していた記号代数の利用と関連する．デカルトが示した方法論が，古代から取り組まれていた幾何学の問題（接線，法線の作図，等々）に必ずしも十分には応じていないとする判断がニュートンにはあった．だからこそ，旧来の総合的，演繹的な議論構成を保ちつつ，しかも自己の流率論の成果を組み入れ，どこまで望むような曲線図形の幾何学が構築できるか．ニュートンが試してみたいと考えたのも不思議ではない．ただし，3）にあるようにそのモデルとなるユークリッド『原論』に盛られた内容だけでは処理できない．まさにニュートンの流率論を披露するにふさわしい場がここに用意されているのである．

[5]ホワイトサイドは，この年に出現した彗星に対する関心が，この草稿執筆から遠ざかった理由の一つではないかと推察している．MP, Ⅳ, p. 413.

同時に4) で指摘されていることは，ニュートンの数学上の基礎にかかわる．ここでニュートンが批判の対象にするのは，カヴァリエリの方法論やバロウ『幾何学講義』(1670年刊) の手法だろう．ニュートンは「曲線図形〔の何らかの量〕を測ろうとした者は，それらがあたかも多くの無限に小さな部分から成ると考える習慣がある」と指摘している．

カヴァリエリは，彼の著作『不可分者による連続体の幾何学』(1635年) で「不可分者」(indivisibiles) の方法を提示した．カヴァリエリは，ある図形が次元の異なる別の図形によって生成されることを考える．例えば，曲線図形が直線による無数の切り口 (不可分者) の総体によって作られるとするのである．そして直線どうしで成立する比例関係が総体の曲線図形に対しても成り立つと考え，いわゆる「カヴァリエリの原理」に達した．ただし彼の方法が，曲線図形を「多くの無限に小さな部分から」成ると考えていたかどうか，疑問の余地がある．[6] またバロウについては命題14の分析の際に後ほど言及する．

この草稿では，全体の構成に先立ち，次の11個の「定義」が置かれている．

- 1. 流量，2. 流率，3. 正の流率，4. 負の流率 (+註：負の量に対するニュートン流の解釈)，5. 流れ (正の流量，負の流量)，6. 持続的な量，安定的な量，与えられる量，7. 直線の極，8. 動点の位置，9. 運動の境界，範囲，10. 量を高めること，11. 量を下げること．

この定義の中では，4「負の流率」を定義した後で，註が付されている点が興味深い．ニュートンが負の量に対して，どのような見解を持っていたのかがわかるからである．17世紀後半の段階において代数的な記号法は洗練の度合いを高めていた．それは方程式論の発展と直接関連する．それと並行して虚量，負の量に対する認識も議論されていた．ただ負の量をどのように捉えるか，必ずしも数学者間で広く了解が存在した訳ではない．デカルト「幾何学」(1637年刊) では，方程式の正の根を「真根」，負の根を「偽根」と称していたほどである．ニュートンは負の量をどう把握すべきか示している．実際，「債務の増加」の割合が資産の「負流率」，「債務の減少」が資産の「正流率」としている．結局，そうした現実的な例によらなければ，負の量を了解しにくかったということであろうか．

続けて以下の6個の公理が立てられる．

1) 持続的に等しいものは，等しい流率によって生成されること，

2) 等しい流率によって生成されたものが等しいこと，

3) 与えられた比のまま持続的に存在するならば，流率が同じ比になること，

4) 同じ比で生成されるならば，同じ流率で存在すること，

5) 全体の流率は，部分の流率と等しくなること，

6) 流率が「生まれてきた部分の最初の比」になること．あるいは負流率によって「消えていく部分の最後の比」になること．

---

[6]カヴァリエリに関しては，Andersen, kirsti, "Cavalieri's Method of Indivisibles," *Archive for History of Exact Sciences*, **31**(1985), pp. 291-367 参照．

さらに次の 2 個の公準が要請される.

1) 任意の線を幾何学的手段によって動かすこと,

2) 点によって,あるいは動かされた線の交点によって描かれる線が与えられること.

この草稿では,以上の設定の下で議論が展開される.個々の命題の条件において,あるいは証明を行う際に,流量・定量が図形の中に割り当てられる.例えば,直角三角形が与えられる.その中の特定の辺や直角以外の角に変化する量が対応する.そして他に定量が対応するというようにである.その上で,個々の基本的性質や結果が比例論の用語で語られる.特に公理 6 の「最初の比」,「最後の比」が,ニュートン流の「極限操作」として機能する(具体的には以下の第 1 巻命題 14,命題 26 の分析を参照).変化する量に関して,明示されていないが時間を実質的にパラメータにしている.瞬間的な変化の量(瞬間速度)が存在することを認めることで極限値の存在論的な議論を回避する意図があるように感じられる.われわれの目から見れば,数学的に素朴と言わざるを得ないが,ニュートンにとって流率法の成果を体系的に論証していく上で,欠くべからざる設定である.

3.2 代表的な諸命題・諸問題より

第 1 巻命題 14 は,全体の中でのハイライトの一つである.あくまでも未発表の草稿であるが,ここで史上初めて「三角関数」に対する流率(微分)計算の公式が表明されているからである.当然,ニュートンには(われわれのいう意味での)「関数」概念は備わっていない.あくまでも円の中に現れる量として捉えられる.ニュートン流の極限操作も含めてその論証を確認しよう(ただし〔 〕内は本稿筆者による補足).

命題 14 の論証の概要:(図 1 において)AB を中心 C,半径 AC によって描かれた円の弧とする.AT は与えられた点 A においてその円に接する直線とする.また B において弧と交わる割線 CT を引き,この割線に対して角 ACS の正弦 AS を引く.いま弧 AB と正接 AT は Ab と At まで流れるとする.このとき切片 $CBb = \frac{1}{2}CA \times Bb$.三角形 $CTt = \frac{1}{2}CA \times Tt$ となるので,弧の一部分 Bb : 正接の一部分 Tt = 切片 CBb : 三角形 CTt となる.

いま別の三角形 Cpq を同じ線分 CT と Ct の間に作図する.角 Cpq を角 CTt に等しくすると,Cpq は三角形 CTt に相似で,しかも切片 CBb の面積に等しくなる.ここでユークリッド『原論』第 6 巻命題 19〔「相似な三角形は互いに対して対応する辺の 2 倍の比〔平方の比〕にある」〕から,これらの三角形は辺の平方の比になる.すなわち 弧 $Bb : Tt = Cp^2 : CT^2$.

よってもし点 T と t とが一致するまで逆に流れるならば,点 p と q はまた同様に重なった上で,中間の弧に一致し,Cp は CB に等しくなる.したがって最後の比 $Cp^2 : CT^2$,すなわち消えゆく弧 Bb : 消えゆく線分 Tt の最後の比は,$CB^2 : CT^2$,〔$CB = CA$ より,$CB^2 : CT^2 = CA^2 : CT^2$.また $CA : CS = CT : CA$ から $CA^2 = CS \times CT$.こ

れを前の比例式に代入して$CB^2 : CT^2 = CS : CT$を得るので,〕つまり$CS : CT$になる．ゆえに公理6によって，$fl(AB) : fl(AT)$は同じ比になる．〔すなわち$\angle ACB = \theta$とすると$d\theta : d(\tan\theta) = \cos\theta : \dfrac{1}{\cos\theta}$.〕

また命題12によって$CT : AT = fl(AT) : fl(CT)$となるので，ゆえに比を結合することによって（connectendo）$CS : AT = fl(AB) : fl(CT)$．再び命題12より，$CT : CS = fl(CT) : -fl(CS)$.〔このときすでに導いたように$CT : CS = fl(AT) : fl(AB)$. これらから$fl(AT) = \dfrac{fl(AB) \times fl(CT)}{-fl(CS)}$．これを$CT : AT = fl(AT) : fl(CT)$に代入して，$fl(AT)$を消去すると,〕$fl(AB) : -fl(CS) = CT : AT = CA : AS$.〔すなわち$d\theta : -d(\cos\theta) = 1 : \sin\theta$.〕

さらに命題11によって$AS : CS = -fl(CS) : fl(AS)$．ゆえに〔$fl(AB) : -fl(CS) = CA : AS$から，$-fl(CS) = \dfrac{AS \times fl(AB)}{CA}$．$AS : CS = -fl(CS) : fl(AS)$において$-fl(CS)$を消去すると〕$CA : CS = fl(AB) : fl(AS)$.〔すなわち$d\theta : d(\sin\theta) = 1 : \cos\theta$.〕

一端，微小な量だけ流れた（変化した）量（$AB \Rightarrow Ab$, $AT \Rightarrow At$）の間に成立する比例式を求める．それをまた元に引き戻す（「逆に流れる」）．変化した量が消えるのと同時に「最後の比」による比例関係の構築が行われている．これは公理6を根拠としている．また直角三角形に対して成立する命題11，12が有効利用されている点に注意したい．すなわち，

- 命題11：直角三角形の斜辺が定量であることを仮定した命題→図1で三角形CASに適用，
- 命題12：直角三角形の直角をはさむ一辺が定量であることを仮定した命題→図1で三角形ATCに適用，

といった形で証明済みの命題が有効利用されている．

三角関数に対する（われわれの用語で）微分計算は，ニュートンにとっての先行研究であるバロウ『幾何学講義』(1670年刊）の中で行われていた．バロウは図2において，接線問題の一例として，$(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$と読みとれる結果を示していた．[7] ただしニュートンのように一般的に計算公式として定式化する意図はない．それに比してニュートンの示した結果は，数学史上の重

---

[7]バロウの証明（第X講例5）の概要は次の通り．図2左図（120番）において，$CB = r, CK = f, EK = g$とする．また右図（121番）で，$AP =$ 弧 BE, $MP = BG$, $AQ =$ 弧 BF, $NQ = BH$，さらに$MR = a, NR = e$とする．そして点Mにおける接線を考え，その接線影$TP = t$を求めている．いま角$ECK = \theta$とするならば，$AP = r\theta$, $MP = r\tan\theta = m$より，tを求めることが正接の微分計算を実質的に示すことになる．ただしバロウは左図のKLや右図のNRは微小な量と考えている．このとき，その微小な三角形と有限量を持つ三角形の間に次のような比例関係が成立する．

$$CE : EK = \text{（微小な）弧}\ EF : LK = QP : LK \iff r : g = e : LK \tag{1}$$

この（1）から，e^2の項は無視して$LF = \sqrt{r^2 - (f + \frac{ge}{r})^2} \simeq \sqrt{g^2 - \frac{2fge}{r}}$を得る．また

$$CL : LF = CB : BH = CB : QN \iff f + \frac{ge}{r} : \sqrt{g^2 - \frac{2fge}{r}} = r : m - a \tag{2}$$

要な出来事として記憶に値する．17 世紀の数学研究者たちは，正弦，余弦，正接，対数といった超越量を無限級数に直し，項別微分によって計算する．1669 年の「解析について」論文でもその手法は頻繁に用いられていた．ニュートンはこの「曲線の幾何学」命題 14 で，彼独自の極限操作を通じて，直接三角関数の流率の計算公式を得ている．この草稿はあくまでニュートン個人がしたためたものであり，公表されなかった．したがって同時代における影響を論じることはできない．だが体系的な議論の構成によって，明確に三角関数の「微分公式」を提示していたことは注意すべきだろう．

また命題 26 は，『プリンキピア』と内容的な結びつきがある．こちらも論証の概要を確認しよう．

命題 26 の論証の概要：図 3 において，AB を位置において与えられた直線とし，BD は交わっている直線とする．$BP : \sin ABD = fl(AB) : fl(\text{弧}\, B)$ となるように点 P をとる．すると点 P は直線 BD の角運動の極になる．

いま BD が bd の位置に達するまで少しだけ動かす．また Q を直線 BD, bd の交点，そして QD を与えられた円の半径，Dd をその角 DQd に張られた弧とする．このとき弦 dD を引いて，それを E で直線 AB に交わるまで延長する．そしてそれに平行な線 BC を Qd と C において交わるように引く．すると三角形 BbC, Ebd の相似により，また同様に三角形 QDd と QBC の相似により，$Bb : BC = Eb : Ed$，かつ $BC : Dd = BQ : DQ$ となる．そして比を結合することによって，〔二つの比例式から $BC = \dfrac{Bb \times Ed}{Eb} = \dfrac{Dd \times BQ}{DQ}$，すなわち $Bb \times (DQ \times \dfrac{Ed}{Eb}) = Dd \times BQ$ より〕 $Bb : Dd = BQ : DQ \times \dfrac{Ed}{Eb}$ となる．

いま位置において直線 dQ を先の DQ に戻す．そして与えられた円 Dd の中心を Q に重ねる．このとき Ed と Eb が ED と EB へと消失するならば，消失する直線 Bb : 消失する弧 Dd の最後の比は，$BQ : DQ \times \dfrac{ED}{EB}$ となる．一方で $EB : ED =$ 半径 : $\sin ABD$．かつ補題により $BQ : \sin ABD =$ 直線 Bb : 弦 Dd の最後の比，すなわち $=$ 直線 Bb : 弧 Dd の最後の比になる．したがって公理 6 によって，直線 AB の流率 : 角 ABD に張られた弧の流率 は同じ比になる．角 ABD の正弦に対して同じ比を持っている BQ と BP は等しい．すなわち，ともに進んでいる直線 bd, BD の究極の交点は，点 P に向けて取られ，それは結局，定義 7 より直線 BD の角運動の極になる．

証明中に言及される「補題」に相当するものは，この草稿中には存在しない．実質的には『プリンキピア』第 1 巻補助定理 7（「弧，弦，接線間の比の極限は 1 に等しい」）が対応していると考えられる．[8] この命題は，曲率中心を求めて接線の作図をすることにつなげる意図があったかに見える．逆 2 乗則により向心力が与えられる場合に軌道を求める問題（いわゆる「逆問題」）への応用

から，$r : m = f : g$ を用いて，かつ e^2, a^2 等，2 次の項を無視して，$rfma = gr^2e + gm^2e$ を得る．最終的に a を m に e を t に置き換えて，$t = \dfrac{r^2m}{r^2+m^2} = \dfrac{CB^2}{CG^2} \times BG = \dfrac{CK^2}{CE^2} \times BG$ を得ている．Isaac Barrow, *Lectiones geometricae*(1670_1)(Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1976)(rep.), p. 84

[8] *Isaac Newton's Philosophiae naturalis principia mathematica*, edited by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen（Cambridge: Harvard University Press, 1972）（以下では Koyré and Cohen と省略する），Vol. Ⅰ, p. 78f, 邦訳，河辺六男責任編集『ニュートン（中公バックス世界の名著 31）』（中央公論社，1979 年），89f 頁．

をこの段階でニュートンがどの程度視野に入れていたか．われわれには判断の材料が乏しい．『プリンキピア』へと結びつく力学研究の中で，ここで作られた流率法の諸命題を直接応用していることが確認できるならば，われわれの議論は非常に明快になるだろう．だが『プリンキピア』に含まれる諸命題と対応関係がきれいに結ばれるわけではない．草稿「曲線の幾何学」は『プリンキピア』への準備において一定の役割を果たしていると考えられるが，主目的としているとも判断できない．そうするには少し論拠が不足している．研究の次の段階へ進んでいく一過程としておくことが穏当だろう．

問題3以降は，デカルト「幾何学」第2巻において取り上げられていたものと同じ問題を含んでいる．ニュートンにとって，そうした問題を解決することが当初からの目標だったであろう．

> **問題3の論証の概要**：図4で，BC は楕円の一つの軸 AD に対して垂直に立てられ，BT, BP がそれぞれ点 C における接線影，法線影とする．もし $AB \times BD : BC^2 = DD : EE$，すなわち $AB : \dfrac{BC \times D}{E} : BD$ が続けて比例するならば，命題4〔A, B, C が続けて比例するならば，$fl(A) : fl(B) = 2B : A - C$〕によって $\dfrac{2BC \times D}{E} : BD - AB = fl(AB) : fl(\dfrac{BC \times D}{E})$ となる．あるいは，$\dfrac{2BC \times DD}{EE} : BD - AB = fl(AB) : fl(BC) = BT : BC = BC : BP$ となる．すなわち，$BP = \dfrac{EE}{DD} \times BX$ である．

デカルト『幾何学』は，接線（あるいは法線）の問題を，(与えられた図形に対する）代数方程式を連立し，それらが重根を持つ（＝変量を一つに絞った後に，平方完成する）という考えで処理する．これに対してニュートンは，代数的方程式の手法によらず，問題解決する．ニュートンの与えた結果は，デカルトのものと同等である．[9] これはニュートンが抱いたデカルト批判の観点からすると，うまく成功収めた例になっているといえよう．ただし同時にこのあたりが，この草稿「曲線の幾何学」におけるニュートン流の流率論の限界であったとも考えられる．実際，「方法について」論文でも扱われていたコンコイド曲線などが登場する段階で，この草稿は中断されてしまう．

---

[9] デカルト『幾何学』(1637年刊）第2巻の「与えられた曲線，またはその接線を直角に切る直線を見いだす一般的方法」の内容に対応している．デカルトは，楕円に関してアポロニオス『円錐曲線論』第1巻命題13に言及し，その方程式を与えている．いま図4において，楕円の通径を r，横径 AD を q，$AB = x$, $BC = y$ とすると，楕円 ACD は

$$y^2 = rx - \frac{r}{q}x^2$$

と表される．デカルトは以上の設定のもとで，楕円に対して内側から接する円の方程式を連立させる．それらが重根を持つことから，法線影 $BP = \frac{1}{2}r - \frac{r}{q}x$ を得ている．ニュートンがこの問題3で示したことは（$BP = \frac{E^2}{D^2}BX = \frac{E^2}{D^2}(AX - AB)$），そのデカルトの結果と同じである．すなわち，楕円の通径の横径に対する比の値 $\frac{r}{q}$ を $\frac{E^2}{D^2}$ と考えればよい．*Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery(Paris: J. Vrin, 1996), VI, pp. 414f, 邦訳，原亨吉他訳『増補版デカルト著作集』1（白水社，2001年），32-36頁．

4 まとめ，疑問点

ニュートンの流率論は三つの主要論文が示すように，1660 年代後半から 1671 年初め頃までに基本的には確立されていた．その後，1670-71 年論文「級数と流率の方法について」の補遺では，この「曲線の幾何学」と同様の意図で部分的に議論が再構成されていた．デカルトに代表される代数的手法による接線問題，その他の幾何学的問題に対して，ニュートンなりのオルターナティヴを提示する作業はどのように評価されるべきであろうか？

ホワイトサイド編纂のテキストでは，1690 年代以降のニュートン流率論の展開を見ることができる．1691 年から 93 年頃にかけて記された草稿は，1704 年に『光学』の付録として公刊される論文「曲線の求積論」(Tractatus de quadratura curvarum) に向けて準備の跡である．これらの内容は,「解析について」論文や「方法について」論文の内容をふまえたものである．特にもっとも重要な技法である無限級数の利用を軸に，曲線の式が与えられたときに流率計算による関係式に変形するか，あるいは逆に流率に係る関係式が与えられたときに,（われわれの用語でいう）積分計算の結果を与えるのが主眼である．ニュートン流率論の「主流」を示した内容になっている．こちらを本筋と考えるならば，この 1680 年の執筆されたと推定されたこの草稿の様相は随分と異なるように見える．

そもそもこの草稿の執筆年代は推定の域を出ない．ただ仮に 1670 年代の初めの頃に設定しても，1680 年代の半ばまで遅らせても，デカルト批判，さらには古典的な幾何学の手法に対するニュートンの敬意が動機の一つになっていることは注意を払うべきである．しかしニュートンの流率論の本質が変容したと考えるのは誤りであろう．用語の相違はあるにせよ，流率論の基本概念，すなわち運動に基づいた変化量（流れる量）を設定は一貫している．「最後の比」などのある種の極限操作を行うことは,『プリンキピア』を経て「曲線の求積論」へと受け継がれる．無限小導入に対する批判も，運動に根ざしたニュートン流の認識論の表明として必ずしも古典的な幾何学を重要視することと連動しているわけではない．

一方で,「曲線の幾何学」のいくつかの命題で示された結果は，1680 年代半ばに進んだ『プリンキピア』執筆やそれ以前の準備草稿「運動について」(1684 年頃執筆）との関連を想像することも可能であろう．例えば，第 1 巻の最終部分命題 26-30 は，未完成に終わってしまったが,「運動について」から『プリンキピア』における重要問題．すなわち物体の運動の軌道が与えられたときに働く力を見いだす問題（順問題）と逆 2 乗則にしたがって運動する物体の軌道を考える問題（逆問題）の中で活用される余地があったようにも見受けられる．加えて，この「運動について」の初期稿では，仮定 4 として「運動の始まりにおいて (motus initio) 任意の中心力によって推し進められた物体が描く空間は，時間の 2 重比になる」と述べている．こうした認識に至る中で，ニュートンが独自の極限操作である「最初の比」,「最後の比」を利用していることも考えられる．[10] ただし『プリンキピア』,「運動について」両者とも，流率計算を表面に出して結果を得ていない．回転の極を持った直線にかかわるこれらの命題などは，力学研究への何らかの応用の可能性をはらんでいたように考えられるが，推測の域は出ない．

『プリンキピア』の命題を導出するのに直接は使用されていないが，例えば第 1 巻補助定理 11

[10]草稿「運動について」は *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*, edited by A. R. Hall and M. B. Hall(Cambridge: Cambridge University Press, 1978), pp. 239-301 参照.

「接点において有限の曲率を持つあらゆる曲線において，次第に消滅していく接触角の対辺は，極限ではその対辺と接点との間に含まれる弧の弦の2乗に比例する」では，上述した補助定理7同様，「曲線の幾何学」で活用されたニュートン流の極限操作（「最初の比」，「最後の比」）を用いて導いている．ここでニュートンは利用する自らの手法に関して，「注解」として説明を加えている．「曲線の幾何学」の中では，第1巻公理6に流率概念と組にして，あっさり導入されていたが，カヴァリエリの「不可分量」の考え方と対比して次のように綿密に論じられている．[11]

> 極限の比はそれによって諸量が消失してしまうが，実際に極限量の比ではなく，限りなく減少していく諸量の比が，たえず近づいていく極限であり得る．また与えられた任意の差に対するよりもいっそう近くまで達することはできるが，決して超えることはできず，それらの量が無限に小さく減少するまでは実際に到達することができない極限である．

「曲線の幾何学」の段階に比して，公刊を意識して説得力を増すようにし，より精密に自己の極限操作の方法に対して誤解が生じないよう工夫しているのが分かるだろう．まさしくわれわれが取り上げた草稿における基本技法が明確化する好例である．また順番は後回しになっているが，第2巻の補助定理2「ゲニタ（genita）〔被生成量〕のモメントゥム（momentum）は，そのゲニタを生み出す各辺のそれぞれのモメントゥムに，同じ辺のベキ指数とその辺の相乗量（coefficiens）を続けてかけて得られるものに等しい」で別の用語を通じて流率概念が提示される（「流率」（fluxio）という語も説明には登場する）．この補助定理は実質的に，

$$x^n \text{のモメントゥム} = n \times \dot{x} \times x^{n-1}$$

を示す．またこの補助定理から得られる系1は，「曲線の幾何学」第1巻命題8（あるいは修正版命題14）と同一である．[12]　こうしてニュートンが流率論を比例論の枠の中で再構築した試みは，基本概念・公式において別の研究領域において吸収されていったのであろう．

さらに序論部で述べられているこの手稿の意図を「深読み」することもできる．すなわち，ニュートンの意図は，自身が1670年代初めまでに作り上げた成果を当時の数学研究者，あるいは後進の者たち（その中には彼が教鞭をとっていたケンブリッジの学生も含まれるだろう）に対してより説得力のある形で示したかったのではないか．17世紀後半においてもユークリッド『原論』の記述スタイルは，相変わらず規範としての役割を果たし続けていた．他者に伝達するためにより安全な手法をとること．それは序論中の「私が以下の論考を記したのは，解析によって解くなのがならわしになっている多くの種類の問題が，（少なくとも大部分は）総合によってより簡単に解くことができる」（下線引用者）という一文に込められた思いだったかもしれない．

ニュートンは，この「曲線の幾何学」全般において「教育的配慮」に類するメッセージを発していない．だがわれわれが特に注目した第1巻命題14などは，当時の先端技法である無限級数によらず，三角関数の流率計算を公式化していた．これをデカルト批判と結びつけ，方法論の変化と捉えるだけでは不十分のように考えられる．

---

[11] Koyré and Cohen, p. 86ff, 邦訳，94-97頁．
[12] *Ibid.*, pp. 364-368, 邦訳，278-282頁．

この「曲線の幾何学」は，確かに伝統的な総合的な表現スタイルで成果が提示される．そして実際に，デカルトが成し得たのと同じ程度，比例論に則った議論を構築できた．ただある段階まで来て，この草稿の執筆が止まってしまったことは，外的な理由にもよるだろうが，この草稿の数学的内容自身が備えていた目標自体にも原因があるように考えられる．やはりニュートンの流率法建設における基本技法である無限級数を排除したことが足かせになっている．その手法抜きでは，自分自身が過去に得た結果を十分に取り込むことはできないからである．[13] 上にも述べたが，先端にいた研究者のみならず他の人々に対してもより説得力を増す記述法に書き直すことは，当然ニュートン自身が得た最高の結果を盛ることとは別次元の作業である．本草稿の冒頭には4巻構成を目指したことが記されている．この記述スタイルに沿うならば，第3巻として予定した逆流率法をどのように示すのか「方法について」論文でまとめられた積分計算のパターン分類を示すことは想像しづらい．[14]

その一方で，流率論の再構築，比例論の論法で結果を積み重ねていくことは，『プリンキピア』(あるいはその準備的な草稿）などの力学研究の中に応用の場面を作り出したように見える．その結果，この草稿で構築された内容は発展解消した，というのが実情ではなかろうか．その意味で，「方法について」論文の補遺から「曲線の幾何学」へと至るニュートン流率論の分枝は，数学上の限界と他の問題への展開・吸収へと歩んでいったと考えるのが良いのではないだろうか．

図1

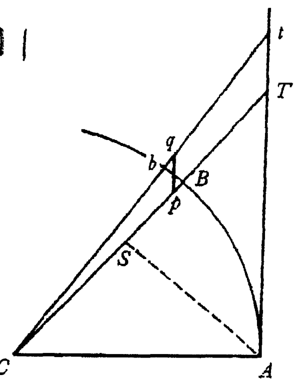


図3

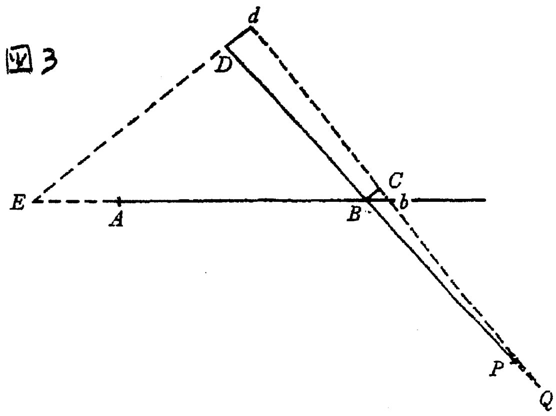


図2

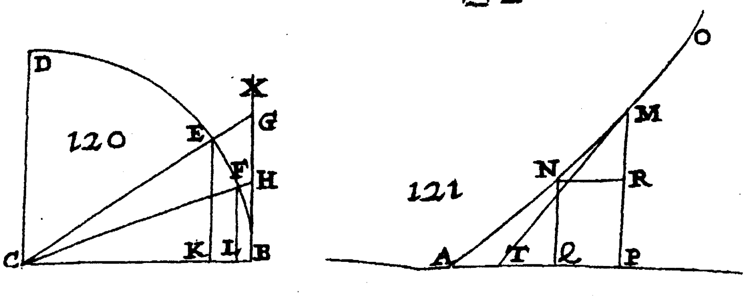
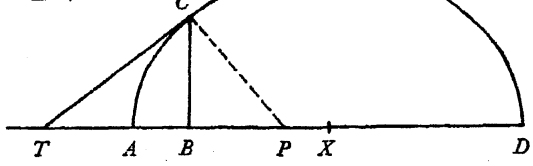


図4



[13]原亨吉は，この草稿「曲線の幾何学」を「方法について」論文に対して内容的に「後退と見える」と評価した．無論，単純な後退ではなく，本文中に記したように異なる意図に基づいて構想されたものと考えるべきであろう．原亨吉「近世の数学」(伊東俊太郎・原亨吉・村田全『数学史』(筑摩書房，1975年）所収)，314頁参照．

[14]MP, III, pp. 244-255.